Hertentamen Golven en Optica – 16 april 2013

P. Dendooven

Vragen en antwoorden

Opgave 1: stralingsdruk (3 punten)

Een lichtbundel met een intensiteit (Engels: *irradiance*) van 4.00×10^6 W/m^2 valt loodrecht in op een oppervlak dat 60 % van de intensiteit weerkaatst en 40 % van de intensiteit absorbeert.

Vraag: Wat is de resulterende druk (uitgedrukt in N/m^2) op dit oppervlak ?

Ter info: relatie tussen fysische eenheden: J = N × m

Antwoord:

voor een 100% absorberend oppervlak: $P = \frac{I}{c}$ (c = lichtsnelheid)

voor een 100% weerkaatsend oppervlak: $P = 2\frac{I}{c}$

voor de verhouding weerkaatsing/absorptie in dit geval:

$$P = (2 \times 0.60 + 0.40)\frac{I}{c}$$

$$= 1.60\frac{4 \times 10^6\, W/m^2}{3 \times 10^8\, m/s} = 2.13 \times 10^{-2}\, N/m^2$$

merk op: eenheid $\frac{I}{c} = \frac{W/m^2}{m/s} = \frac{J/s}{m^3/s} = \frac{N\ m}{m^3} = \frac{N}{m^2} (= Pa)$ = eenheid van druk

---

Opgave 2: polarisatietoestanden (5 punten)

Gegeven: de volgende, in de *z*-richting lopende, golven:

1. $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}}\ E_0 \, cos(\,kz - \omega t\,) + \hat{\mathbf{j}}\ E_0 \, cos(\,kz - \omega t + \pi\,)$
2. $\vec{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{i}}\ E_0 \, cos(\,\omega t - kz\,) + \hat{\mathbf{j}}\ E_0 \, cos(\,\omega t - kz + \pi/2\,)$

Hierbij zijn $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ de eenheidsvectoren in respectievelijk de *x*- en *y*-richting.

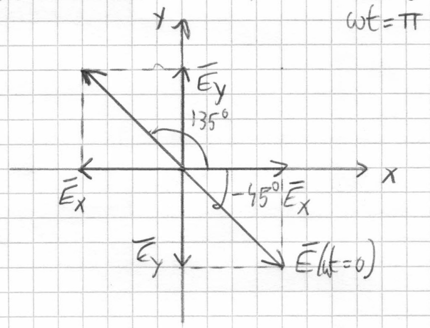
Vraag: Beschrijf de polarisatietoestand van deze 2 golven (elk afzonderlijk). Meer bepaald: lineair, elliptisch of circulair en, indien relevant, links- of rechtsdraaiend, polarisatierichting. Teken een figuur om een en ander duidelijk te maken.

Antwoord:

1. zelfde amplitude
x en y component zijn π uit fase en $\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y$
→ P toestand (lineair gepolariseerd), richting = −45°/135° t.o.v. x-as

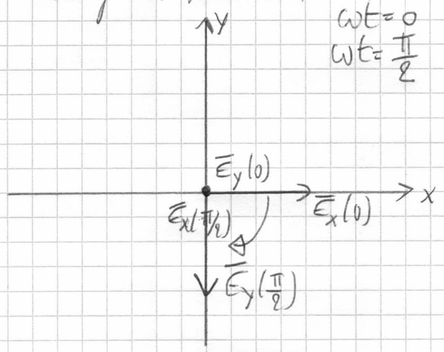
in detail, voor $z = 0$:

$\omega t = 0$
$\omega t = \pi$



2. figuur analoog als hierboven ($z=0$)

$\omega t = 0$
$\omega t = \frac{\pi}{2}$



zelfde amplitude
x en y zijn $\frac{\pi}{2}$ uit fase } → circulair gepolariseerd

kijkend tegen voortplantingsrichting in : met de klok mee : R

Opgave 3: Eigenschappen van elektromagnetische golven (6 punten)

Hieronder de vergelijkingen van Maxwell in vacuüm, zowel in vectorvorm als in cartesische coördinaten (voor (1) en (2) uitgesplits in *x*,- *y*, en *z*-coördinaat).

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \boldsymbol{t}} \qquad (1) \qquad\qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \boldsymbol{t}} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (1.1) \qquad \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (1.2) \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (1.3) \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad (3) \qquad\qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

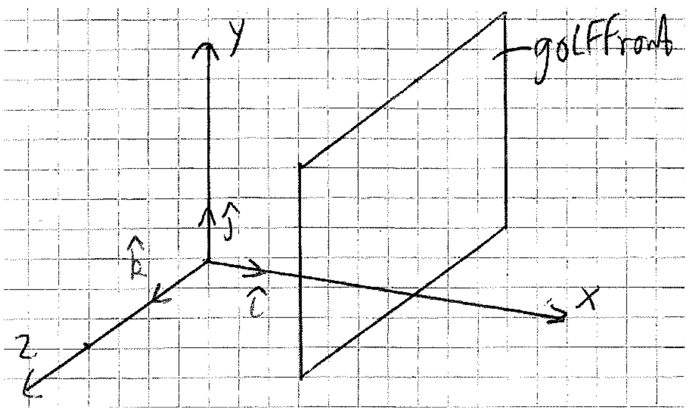
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1) \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

Vraag: Leid aan de hand van een vlakke golf die zich in de positieve x-richting voortbeweegt (zie onderstaande schets) de volgende eigenschappen van elektromagnetische golven af:

a) transversaal: zowel het elektrisch veld ($\vec{E}$) als het magnetisch veld ($\vec{B}$) staan loodrecht op de voortplantingsrichting
b) het elektrisch en magnetisch veld staan loodrecht op elkaar
c) het elektrisch en magnetisch veld zijn in fase
d) voor de amplitudes van de velden geldt: $|\vec{E}| = c\,|\vec{B}|$, met c = lichtsnelheid.

Beschouw een vlakke harmonische golf voor punten c) en d).

(De nummering van de vergelijkingen hierboven kan gebruikt worden om te verwijzen naar de gebruikte vergelijkingen.)



Antwoord:

vlakke golf beweegt in x-richting → golffront ⊥ x-as
golffront bestaat uit punten van constante fase, dus van constante golffunctie, dus $\frac{\partial \bar{E}}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = 0$, $\bar{E}(x,t)$

vgl (3.1) wordt dan: $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \rightarrow E_x$ constant

een constante E_x neemt niet deel aan de golf, dus kan men stellen $E_x = 0$ wanneer we enkel het golfkarakter onderzoeken

dus: $\bar{E} \perp$ x-as (= bewegingsrichting) → transversale golf   a)

$\bar{E}$ wijst in een bepaalde richting in het (y,z)-vlak,
stel $\bar{E} \parallel$ y-as: $\bar{E} = E_y(x,t)\,\hat{j}$

(1.1) wordt dan $0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$

(1.2) wordt dan $0 = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$

(1.3) wordt dan $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$

hieruit wordt besloten:

dus: $\bar{B}$ heeft een golfkarakter enkel in de z-richting
$\bar{B}$ is transversaal (staat ⊥ op voortplantingsrichting)   a)
$\bar{B} \perp \bar{E}$ b)

we passen dit toe op een harmonische golf

$$E_y(x,t) = E_{0y} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varepsilon\right]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \rightarrow B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x}\, dt$$

$$B_z = -E_{0y} \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \varepsilon \right] \right) dt$$

$$= -E_{0y} \left(-\frac{\omega}{c}\right)(-1) \int \sin\left[\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \varepsilon \right] dt$$

$$= -E_{0y} \frac{\omega}{c} (-1) \frac{1}{\omega} \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \varepsilon \right]$$

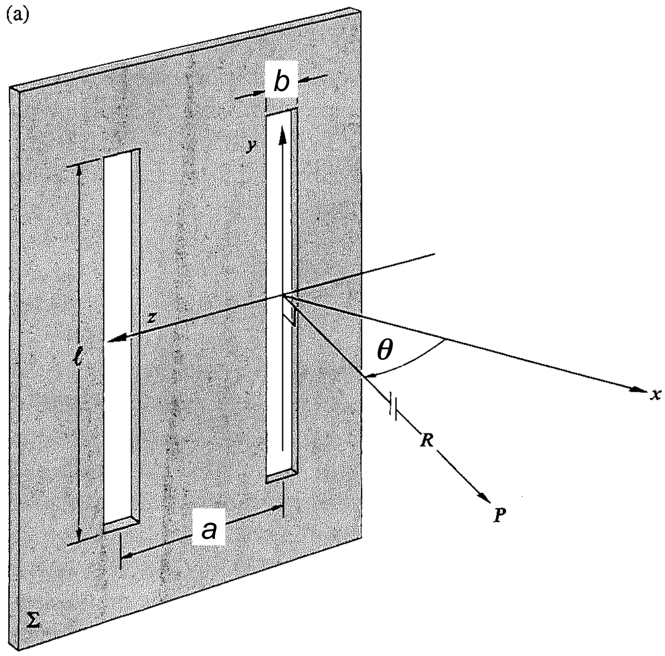
$$= \frac{E_{0y}}{c} \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \varepsilon \right]$$

$B_z = \frac{1}{c} E_y \rightarrow \bar{B}$ en $\bar{E}$ in fase c)

$\rightarrow |\bar{E}| = c\,|\bar{B}|$ d)

Opgave 4: Fraunhoferdiffractie aan een dubbele spleet (6 punten)

De onderstaande figuur (figuur 10.13 uit Hecht) geeft de geometrie waarin diffractie aan een dubbele spleet behandeld werd.



De intensiteit van het diffractiepatroon in functie van de hoek θ wordt gegeven door (vergelijking 10.24 uit Hecht):

$$I(\theta) = 4I_0 \, \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \, \cos^2\alpha \qquad \text{met} \quad \alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta \quad \text{en} \quad \beta = \frac{kb}{2}\sin\theta,$$

waarbij a = afstand tussen de centra van de spleten en b = breedte van de spleten. k is het voortplantingsgetal van het gebruikte licht. I_0 is de intensiteit van één spleet bij $\theta = 0$. De diffractiefactor $\sin^2\beta/\beta^2$ stelt de diffractie van 1 spleet voor, de interferentiefactor $\cos^2\alpha$ stelt de interferentie van 2 oneindig smalle spleten voor.

De dubbele spleet wordt beschenen met groen licht van een kwiklamp met een golflengte van 546,1 nm. Beide spleten hebben een breedte b van 0,100 mm. In het diffractiepatroon valt het vierde-orde **maximum** van de interferentiefactor samen met het eerste orde **minimum** van de diffractiefactor (een zgn. ontbrekende orde, *missing order*).

Vragen:

a. Wat is de afstand tussen de centra van de twee spleten, a ?

b. Wat is de intensiteit van het eerste-orde maximum van de interferentiefactor relatief ten opzichte van de intensiteit van het centrale maximum van het diffractiepatroon ?

Antwoord:

a) interferentiemaximum : $\cos\alpha = \pm 1$

$\alpha = \pm n\pi \quad n \in \mathbb{N}$

4e orde maximum : $n = 4$

$\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta = 4\pi$ (kies positieve waarde)

diffractieminimum : $\sin\beta = 0$ maar $\beta \neq 0$

$\beta = \pm n\pi \quad , n = 1, 2, \ldots$ $(n \neq 0)$

1e orde minimum : $n = 1$

$\beta = \frac{kb}{2}\sin\theta = \pi$

2 bovenstaande vallen samen → zelfde θ

$\sin\theta = \frac{8\pi}{ka} = \frac{2\pi}{kb}$

$a = \frac{8\pi}{2\pi}\frac{kb}{k} = 4b \quad , b = 0.1\,mm$

$a = 0.4\,mm$

b) * centrale maximum van het diffractiepatroon : $\theta = 0$

$\rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$

$I(0) = 4I_0 \underbrace{\frac{\sin^2 0}{0^2}}_{\text{sinc}(0) = 1} \cos^2 0 = 4I_0$

* 1e orde interferentiemaximum : $\alpha = \pi$

$\sin\theta = \frac{2\pi}{ka}$

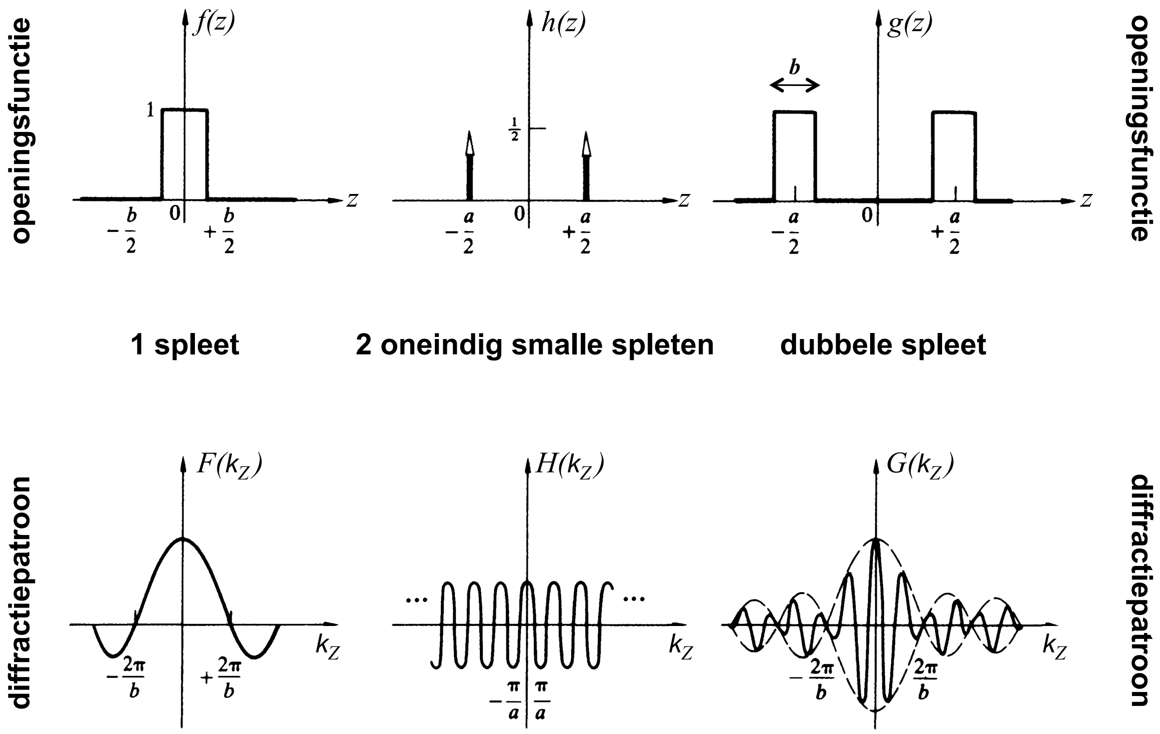
$\beta = \frac{kb}{2}\frac{2\pi}{ka} = \frac{b}{a}\pi$

uit vraag a) : $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$ $\qquad = \frac{1}{4}\pi$

$\frac{I(\theta)}{4I_0} = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi/4}\right)^2 \times (-1)^2 = \left(\frac{(1/2)^{1/2}}{\pi/4}\right)^2 = \frac{8}{\pi^2} = 0.8106$

Opgave 5: (5 punten)

Beschouw onderstaande figuur (gebaseerd op figuur 11.31 uit Hecht).



De bovenste rij toont van links naar rechts de openingsfunctie van een spleet, 2 oneindig smalle spleten en een dubbele spleet. De onderste rij toont van links naar rechts de diffractiepatronen (voor de amplitude van de elektromagnetische golf) horende bij de openingsfuncties in de bovenste rij.

Vragen:

a) Welke wiskundige operatie (geef antwoord **in woorden**) verbindt de openingsfunctie met het diffractiepatroon ?

b) Door middel van welke wiskundige operatie (geef antwoord **in woorden**) kan de openingsfunctie van de dubbele spleet bepaald worden uit de openingsfunctie van een spleet en die van 2 oneindig smalle spleten ?

c) Door middel van welke wiskundige operatie (geef antwoord **in woorden**) kan het diffractiepatroon van de dubbele spleet bepaald worden uit het diffractiepatroon van een spleet en dat van 2 oneindig smalle spleten ?

d) Hoe houden de antwoorden op bovenstaande vragen verband met het convolutietheorema ?

Antwoord:

a) Fouriertransformatie

b) convolutie(integraal)

c) vermenigvuldiging

d) convolutietheorema:

Fouriertransformatie van de convolutie van 2 functies =
product van de Fouriertransformaties van de 2 functies afzonderlijk
in symbolen: $\mathscr{F}\{f \otimes h\} = \mathscr{F}\{f\}\ \mathscr{F}\{h\}$

Wanneer de functies *f* en *h* openingsfuncties voorstellen, dan is de figuur een toepassing van het convolutietheorema: de combinatie van de antwoorden op vragen a), b) en c) is gelijk aan het convolutietheorema met *f* en *h* de openingsfuncties van één spleet en 2 oneindig smalle spleten.